МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО–ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ имени Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

С.Ю. Вернов

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ДВУХПОЛЕВЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Препринт НИИЯФ МГУ 2007–12/833

С.Ю. Вернов
Научно–Исследовательский Институт Ядерной Физики МГУ
e-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ДВУХПОЛЕВЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Препринт НИИЯФ МГУ 2007–12/833

Аннотация

Построена модель тёмной энергии с фантомным скалярным полем, обычным скалярным полем и полиномиальным потенциалом, происходящим из полевой теории струн. Найдено двухпараметрическое множество точных решений уравнений Фридмана. Найден потенциал, удовлетворяющий полученным из теории струн условиям, и такой, что некоторые точные решения соответствуют при больших временах параметру состояния $w_{DE} > -1$, тогда как другие соответствуют $w_{DE} < -1$. Показана эффективность метода суперпотенциала при поиске новых точных решений.

Ключевые слова: тёмная энергия, фантом, космология, струнная теория поля, точные решения

S.Yu. Vernov
Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics MSU
e-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru

CONSTRUCTION OF EXACT SOLUTIONS IN TWO-FIELDS COSMOLOGICAL MODELS

Preprint SINP MSU 2007–12/833

Abstract

A dark energy model with a phantom scalar field, an usual scalar field and the string field theory inspired polynomial potential has been constructed. A two-parameter set of exact solutions to the Friedmann equations has been found. We have constructed such stringy inspired potential that some exact solutions correspond to the state parameter $w_{DE} > -1$ at large time, whereas other ones correspond to $w_{DE} < -1$ at large time. We demonstrate that the superpotential method is very effective to seek new exact solutions.

Keywords: dark energy, phantom, cosmology, string field theory, exact solutions

1 ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее важных результатов, недавно полученных в космологии, является заключение о том, что комбинированный анализ данных, полученных при изучении суперновых типа Ia, галактических кластеров и на эксперименте WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), убедительно показывает ускоренное расширение Вселенной [1, 2].

Космологическое ускорение указывает на то, что в настоящее время во Вселенной доминирует равномерно распределенная медленно изменяющаяся космическая жидкость с отрицательным давлением, так называемая тёмная энергия [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Для спецификации различных типов космической жидкости обычно используется феноменологическое соотношение между давлением (лагранжевой плотностью) p и плотностью энергии ϱ каждой из компонент жидкости $p = w\varrho$. Функция w называется параметром состояния. Современные эксперименты [1, 2, 3, 4] свидетельствуют о том, что Вселенная является пространственно плоской и в настоящее время параметр состояния тёмной энергии близок к -1: $w_{DE} = -1 \pm 0.2$. Параметр состояния $w_{DE} \equiv -1$ соответствует космологической константе. Как отмечено в [9], параметр состояния, эволюционирующий от $w_{DE} \simeq 0$ до $w_{DE} \leqslant -1$, лучше отвечает экспериментальным данным, чем $w_{DE} \equiv -1$.

Стандартным способом получения зависящего от времени параметра состояния является включение скалярных полей в космологическую модель. При достаточно общих предположениях в рамках четырёхмерной модели с одним скалярным полем может быть реализована только одна из возможностей: или $w_{DE} \geqslant -1$ (модели квинтэссенции), или $w_{DE} \leqslant -1$ (фантомные модели) [10]. Двухполевые модели с пересечением барьера космологической константы $w_{DE} = -1$ известны как квинтом (quintom) модели и включают одно фантомное скалярное поле и одно стандартное скалярное поле. Отметим, что большинство феноменологических моделей, описывающих пересечение барьера космологической константы [11, 12, 13, 14], содержат либо несколько скалярных полей, либо модифицированную гравитацию.

В настоящее время струнные и D-бранные модели находят космологические приложения, связанные с ускоренным расширением Вселенной. В феноменологических моделях, описывающих случай $w_{DE} < -1$, все стандартные энергетические условия нарушены и есть проблемы нестабильности как на классическом, так и на квантовом уровне (см. [5, 15, 16] и ссылки у них). Возможным способом избежать проблему нестабильности фантомной модели является её построение как эффективной модели, возникающей из более фундаментальной теории с нормальным знаком кинетического члена. В частности, если мы рассмотрим модель с высшими производными, например, содержащую $\phi e^{-\Box}\phi$, то первая нетривиальная аппроксимация даёт $\phi e^{-\Box}\phi \simeq \phi^2 - \phi\Box\phi$, то есть кинетический член имеет неправильный (духовый) знак. Оказывается, что именно такая возможность появляется в полевой теории струн (SFT) [17] (см. также [14, 16]), а именно, в теории фермионной NSR струны с учетом GSO$-$ сектора [17, 18]. В качестве скалярного поля ϕ выступает тахион открытой струны, который, согласно гипотезе А. Сена (см. обзоры [19]), описывает распад браны, при котором происходит медленный переход в стабильный вакуум, соответствующий состояниям замкнутой струны.

Четырёхмерная гравитационная модель с фантомным скалярным полем рассматривается как приближение модели теории струн, что даёт возможность решить проблему нестабильности.

В этой статье мы рассматриваем струнную гравитационную модель с двумя скалярными полями и полиномиальным потенциалом. Предлагаемая модель является обобщением однополевой космологической модели, предложенной в [18]. Первые двухполевые обобщения данной модели [20] обладают однопараметрическими семействами точных решений. В этой статье мы строим новую модель с двухпараметрическим семейством точных решений. При больших временах для некоторых значений параметров $w_{DE} < -1$, тогда как для других $w_{DE} > -1$. Отметим, что различное поведение w_{DE} при больших временах соответствует одному и тому же потенциалу и одинаковым асимптотическим условиям для полей.

2 ДВУХПОЛЕВЫЕ МОДЕЛИ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕОРИЕЙ СТРУН

Рассматривается модель пространственно плоской фридмановской Вселенной с фантомным скалярным полем ϕ и стандартным скалярным полем ξ. Фантомное поле представляет из себя тахион открытой струны, тогда как обычное скалярное поле соответствует тахиону замкнутой струны [17, 20, 21, 22]. Поскольку происхождение скалярных полей связано с теорией струн, действие содержит характерную массу струны M_s и безразмерную константу взаимодействия открытых струн g_o:

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{M_P^2}{2M_s^2}R+\frac{1}{g_o^2}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\partial_\mu\xi\partial_\nu\xi)-V(\phi,\xi)\right)\right), \qquad (1)$$

где M_P — масса Планка. Фридмановская метрика $g_{\mu\nu}$ является пространственно плоской:

$$ds^2=\,-\,dt^2+a^2(t)\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2\right),$$

где $a(t)$ — масштабный фактор. Координаты (t,x_i) и поля ϕ и ξ являются безразмерными. Если скалярные поля зависят только от времени, то уравнения движения имеют следующий вид:

$$H^2=\frac{1}{3m_p^2}\left(-\frac{1}{2}\dot\phi^2+\frac{1}{2}\dot\xi^2+V\right), \qquad (2)$$

$$\dot H=\frac{1}{2m_p^2}\left(\dot\phi^2-\dot\xi^2\right), \qquad (3)$$

$$\ddot\phi+3H\dot\phi=\frac{\partial V}{\partial\phi},\qquad \ddot\xi+3H\dot\xi=\,-\,\frac{\partial V}{\partial\xi}. \qquad (4)$$

Для краткости мы используем безразмерный параметр $m_p^2=g_o^2M_P^2/M_s^2$. Здесь H — параметр Хаббла: $H\equiv\dot a(t)/a(t)$, а точка обозначает производную по времени. Отметим, что только три из четырёх уравнений (2)–(4) независимы.

Параметр состояния тёмной энергии w_{DE} можно выразить через H:

$$w_{DE} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}. \tag{5}$$

Пересечение барьера космологической постоянной $w_{DE} = -1$ соответствует изменению знака $\dot{H}$.

В предложенной И.Я. Арефьевой модели [17] (см. также [18, 14, 20, 23, 24]) наша Вселенная рассматривается как медленно распадающаяся D3-брана, динамика которой задаётся тахионом открытой струны. Для описания динамики данного тахиона используется метод обрезания по уровням. Примечательной особенностью подобной динамики тахиона является нелокальное полиномиальное взаимодействие [19, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. Как показано в [31], тахион открытой струны эффективно моделируется скалярным полем с отрицательным кинетическим членом.

Обратная реакция браны описывается динамикой тахиона замкнутой струны. Скалярное поле ξ связано с сектором замкнутых струн [32]. Его локальное описание содержит стандартный кинетический член [22] и, возможно, неполиномиальное самодействие [33].

В статье мы рассматриваем локальные модели с эффективными полиномиальными потенциалами $V(\phi,\xi)$. Форма этих потенциалов предполагается заданной кубической теорией открытых струн с помощью метода обрезания по уровням [25, 26]. В случае плоского пространства-времени эффективная локальная теория обладает чётным потенциалом четвёртой степени и имеет решения типа кинка. В неплоском случае для сохранения аналитического вида решений нужно рассмотреть чётный потенциал шестой степени, переходящий в пределе плоского пространства-времени в потенциал типа Хиггса [18]. Точная форма взаимодействия открытых и замкнутых струн неизвестна, поэтому, следуя статье [20], мы рассматриваем простейшее полиномиальное взаимодействие.

Мы налагаем на потенциал $V(\phi,\xi)$ следующие ограничения:

- потенциал — полином шестой степени:

$$V(\phi,\xi) = \sum_{k=0}^{6}\sum_{j=0}^{6-k} c_{kj}\phi^k\xi^j, \tag{6}$$

- потенциал является чётным: $V(\phi,\xi) = V(-\phi,-\xi)$,

- Коэффициенты при 5-ой и 6-ой степенях имеют порядок $1/m_p^2$ и в пределе $m_p^2 \to \infty$ получается потенциал четвёртой степени.

Из полевой теории струн мы также предположим асимптотические условия для полей. Напомним, что мы имеем в виду следующую картину. Мы предполагаем, что фантомное поле $\phi(t)$ плавно движется из нестабильного возмущённого вакуума ($\phi = 0$) в невозмущённый и останавливается в нём. Другими словами функция $\phi(t)$ обращается в ноль в некоторой точке (пусть $\phi(0) = 0$) и стремится к ненулевой асимптотике при $t \to +\infty$: $\phi(+\infty) = A$. Поле $\xi(t)$ соответствует замкнутой струне и стремится к нулю при $t \to +\infty$.

3 МЕТОД СУПЕРПОТЕНЦИАЛА

Гравитационные модели со скалярными полями играют важную роль в космологии и теориях с дополнительными измерениями. Одной из главных проблем исследования подобных моделей является нахождение точных решений неинтегрируемых уравнений движения.

В то же время легко построить потенциал для заданных частных решений. Поистине, если явная форма полей $\phi(t)$ и $\xi(t)$ задана, то, используя (3), мы получаем $H(t)$ с точностью до константы:

$$H(t) = \frac{1}{2m_p^2}\left(\int^t \dot{\phi}^2(\tau)d\tau - \int^t \dot{\xi}^2(\tau)d\tau\right) + C. \tag{7}$$

Потенциал, как функцию времени, можно выразить через $H(t)$:

$$V(t) = m_p^2\left(3H(t)^2 + \dot{H}(t)\right). \tag{8}$$

Этот прямой метод вычисления потенциала для заданных решений очень эффективен при рассмотрении однополевых моделей и моделей с потенциалом в форме $V(\phi,\xi) = exp(\alpha\xi)V_1(\phi)$ или $V(\phi,\xi) = exp(\alpha\phi)V_2(\xi)$, где α — константа [13]. Для двухполевых моделей с полиномиальным потенциалом данный метод не столь эффективен. Отметим, что вышеупомянутый метод бесполезен при поиске новых решений для построенного потенциала.

В данной статье мы используем метод суперпотенциала и показываем, что этот метод позволяет найти не только потенциал, но и новые точные решения. Метод суперпотенциала был предложен для построения потенциалов, соответствующих точным решениям пятимерной гравитационной модели [34]. Главная идея метода заключается в рассмотрении функции H(t) (параметра Хаббла в космологии) как функции (суперпотенциала) скалярных полей: $H(t) = W\big(\phi(t),\xi(t)\big)$. Уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{\partial W}{\partial\xi}\dot{\xi} = \frac{1}{2m_p^2}\left(\dot{\phi}^2 - \dot{\xi}^2\right). \tag{9}$$

Если найден такой суперпотенциал $W(\phi,\xi)$, что следующие соотношения выполнены:

$$\dot{\phi} = 2m_p^2\frac{\partial W}{\partial\phi}, \qquad \dot{\xi} = -2m_p^2\frac{\partial W}{\partial\xi}, \tag{10}$$

$$V = 3m_p^2W^2 + 2m_p^4\left(\left(\frac{\partial W}{\partial\phi}\right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)^2\right). \tag{11}$$

то соответствующие $\phi(t)$, $\xi(t)$ и $H(t)$ являются решением системы (2)–(4).

Метод суперпотенциала разделяет систему уравнений (2)–(4) на две части: систему (10), которая как правило интегрируема при заданном полиноме $W(\phi,\xi)$ и уравнение (11), которое не интегрируемо, если $V(\phi,\xi)$ — полином, но имеет частные решения в виде полиномов. Стандартный способ применения метода суперпотенциала не предполагает решения уравнения (11). Потенциал $V(\phi,\xi)$ строится по заданному $W(\phi,\xi)$.

В двухполевых моделях метод суперпотенциала способствует нахождению новых решений. Действительно, дифференциальные уравнения (10) формируют систему второго порядка. Если эта система интегрируема, то мы получаем двухпараметрическое множество решений. Фиксация явного вида полей $\phi(t)$ и $\xi(t)$ равносильна заданию однопараметрического множества решений. Метод суперпотенциала позволяет обобщить это множество решений до двухпараметрического множества. С другой стороны, с помощью этого метода можно строить различные формы потенциала, соответствующие одним и тем же однопараметрическим множествам решениям.

Идея рассматривать параметр Хаббла как функцию скалярных полей и преобразовывать (2)–(4) в (10)–(11) используется в формулировке Гамильтона–Якоби уравнений Фридмана [35, 36] (см. также [37]) и не связана с теориями суперсимметрии и супергравитации. В то же время метод, основанный на идее использования для поиска точных частных решений вместо исходных уравнений движения системы (10)–(11), активно применяется в двухмерных полевых моделях [38, 39] и супергравитации [40]. Уравнения (10) известны как уравнения Богомольного [41] (см. также [39]). Метод суперпотенциала является комбинацией и естественным расширением этих двух методов. Он активно используется в космологии [18, 20, 42, 43]. Отметим обобщения данного метода на уравнения движения, описывающие замкнутые и открытые фридмановские Вселенные [42], системы с холодной тёмной материей [43] и теорию Бранса–Дикке [44].

4 ВЫБОР ПОТЕНЦИАЛА ПО ЗАДАННОМУ РЕШЕНИЮ

В этом разделе мы покажем, что метод суперпотенциала позволяет находить различные формы потенциала $V(\phi,\xi)$ для одних и тех же $\phi(t)$, $\xi(t)$ и $H(t)$.

Используя асимптотические условия, мы предположим следующую явную форму полей:

$$\phi(t) = A\tanh(\omega t) \qquad \text{и} \qquad \xi(t) = \frac{A\sqrt{2(1+b)}}{\cosh(\omega t)}, \tag{12}$$

причём $A>0$, $\omega>0$ и $b>-1$. Отметим, что эти решения являются естественным обобщением решений типа кинка, полученных в однополевой фантомной модели [18].

Построим потенциал, соответствующий полям (12). Функции ϕ и ξ — решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot\phi = A\omega - \frac{\omega}{A}\phi^2, \qquad \dot\xi = \omega\xi\sqrt{1-\frac{\xi^2}{2(1+b)A^2}}. \tag{13}$$

Прямое использование метода суперпотенциала даёт

$$\frac{\partial W}{\partial\phi} = \frac{\omega}{2m_p^2}\Big(A-\frac{1}{A}\phi^2\Big), \qquad \frac{\partial W}{\partial\xi} = -\frac{\omega\xi}{2m_p^2}\sqrt{1-\frac{\xi^2}{2(1+b)A^2}}. \tag{14}$$

Следовательно,

$$H \equiv W = \frac{\omega}{6m_p^2}\left(3A\phi - \frac{\phi^3}{A} - \sqrt{\frac{\left(2(1+b)A^2-\xi^2\right)^3}{2(1+b)A^2}} + H_0\right), \tag{15}$$

где H_0 — произвольная константа. Различные значения H_0 соответствуют различным $V(\phi,\xi)$. Полученные потенциалы

$$V = \omega^2\left(\frac{\left(A^2-\phi^2\right)^2}{2A} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{4(1+b)A^2}\right) + 3m_p^2W^2 \tag{16}$$

полиномиальны только в случае плоского пространства-времени ($m_p^2 = \infty$) и не удовлетворяют условиям раздела 2. Чтобы построить полиномиальный потенциал мы используем тот факт, что функции (12) удовлетворяют не только системе (13), но также и следующей системе:

$$\dot{\phi} = Ab\omega\left(\frac{\phi^2}{A^2} - 1\right) + \frac{\omega\xi^2}{2A}, \qquad \dot{\xi} = -\frac{\omega}{A}\phi\,\xi. \tag{17}$$

Соответствующие параметр Хаббла (суперпотенциал) и потенциал имеют вид (чтобы получить чётный потенциал, мы положили $H_0 = 0$)

$$H = \tilde{W} = \frac{\omega\phi}{2m_p^2}\left(Ab\left(\frac{\phi^2}{3A^2} - 1\right) + \frac{\xi^2}{2A}\right), \tag{18}$$

$$\tilde{V} = \frac{\omega^2}{2}\left(b\left(\phi^2-1\right) + \frac{1}{2}\xi^2\right)^2 - \frac{\omega^2}{2A^2}\phi^2\xi^2 + \frac{3\omega^2\phi^2}{4m_p^2}\left(Ab\left(\frac{\phi^2}{3A^2} - 1\right) + \frac{\xi^2}{2A}\right)^2. \tag{19}$$

Этот пример показывает, что одинаковые функции $\phi(t)$, $\xi(t)$ и $H(t)$ могут соответствовать существенно различным потенциалам $V(\phi,\xi)$. Кроме того, решения не изменятся при добавлении к потенциалу $\tilde{V}$ (или V) любой функции δV, такой что δV, $\partial(\delta V)/\partial\phi$ и $\partial(\delta V)/\partial\xi$ равняются нулю на решениях. Например,

$$\delta V = K(\phi,\xi)\left[\phi^2 + \frac{1}{2(1+b)}\xi^2 - A^2\right]^2, \tag{20}$$

где $K(\phi,\xi)$ является гладкой функцией.

5 ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СУПЕРПОТЕНЦИАЛА

В предыдущем разделе мы показали, как можно выбрать потенциал для заданных решений. В этом мы продемонстрируем возможность нахождения новых решений с помощью метода суперпотенциала. Рассмотрим модель с потенциалом (19). Легко заметить, что система (17) имеет не только решения (12), но и тривиальные решения $\phi(t) = \pm A$, $\xi(t) = 0$, а также решения

$$\phi(t) = -A\tanh(\omega b(t - t_0)), \qquad \xi(t) = 0. \tag{21}$$

Если $\xi(t) \not\equiv 0$, то используя второе уравнение системы (17), мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка на $\xi(t)$:

$$\ddot{\xi}(t) = \omega^2 b\,\xi(t) - \frac{\omega^2\xi^3(t)}{2A^2} + \frac{(1-b)\dot{\xi}^2(t)}{\xi(t)}. \tag{22}$$

Решения уравнения (22) получаются в квадратурах

$$t - t_0 = \pm\int \frac{A\sqrt{2(1+b)}\xi^{b-1}}{\omega\sqrt{2A^2\xi^{2b} + 2A^2b\xi^{2b} + \xi^{2b+2} + 2A^2C + 2A^2bC}}\,d\xi, \tag{23}$$

где C и t_0 — произвольные константы. Для некоторых значениях параметра b, например $b = \,-1/2$, решения системы (17) выписываются явно:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{A\left(\left(C_1^2C_2^2 + 4A^2\right)e^{\omega t} - C_1^2e^{-\omega t}\right)}{\left(C_1^2C_2^2 + 4A^2\right)e^{\omega t} + 2C_1^2C_2 + C_1^2e^{-\omega t}},\\ \xi(t) &= \frac{4C_1A^2}{\left(C_1^2C_2^2 + 4A^2\right)e^{\omega t} + 2C_1^2C_2 + C_1^2e^{-\omega t}}, \end{aligned} \tag{24}$$

где C_1 и C_2 — произвольные параметры. Легко проверить, что при всех значениях C_1 и C_2, кроме $C_1 = 0$, решения (24) и параметр Хаббла (18) имеют следующие асимптотики:

$$\phi(\pm\infty) = \pm A, \qquad \xi(\pm\infty) = 0, \qquad H(+\infty) = \frac{A^2\omega}{6m_p^2}. \tag{25}$$

Таким образом, построена гравитационная модель с двухпараметрическим множеством точных решений. Потенциал и решения удовлетворяют условиям, наложенным с помощью теории струн (см. раздел 2).

Проанализируем свойства полученных решений и космологические следствия. Система (17) инвариантна относительно замены $\xi(t)$ на $-\xi(t)$, таким образом каждому решению $\phi(t)$ соответствуют два решения $\pm\,\xi(t)$. Отметим, что функция $\phi(t)$ инвариантна относительно замены $C_1 \to -C_1$, тогда как $\xi(t)$ меняет знак. Параметр Хаббла зависит от ξ^2, поэтому без ограничения общности мы можем положить $C_1 > 0$.

Система (17) автономна, поэтому из существования решений вида $\{\tilde{\phi}(t), \tilde{\xi}(t)\}$ следует, что пара функций $\{\tilde{\phi}(t-t_0), \tilde{\xi}(t-t_0)\}$, где $t_0 \in \mathbb{C}$, тоже должна быть решением. Удобно ввести в (24) новые параметры так, чтобы один из них соответствовал сдвигу по времени. Чтобы для действительных решений можно было наложить ограничение $t_0 \in \mathbb{R}$, мы положим $C_1 = exp(t_0)$, используя ограничение $C_1 > 0$. Для краткости записи мы введём вместо C_2 параметр $C \equiv C_1C_2$. Решения (24) получаются в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \frac{A\left((C^2+4A^2)e^{\omega(t-t_0)} - e^{-\omega(t-t_0)}\right)}{(C^2+4A^2)e^{\omega(t-t_0)} + 2C + e^{-\omega(t-t_0)}},\\
\xi(t) &= \frac{4A^2}{(C^2+4A^2)e^{\omega(t-t_0)} + 2C + e^{-\omega(t-t_0)}}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Чтобы сравнить полученные решения с изначальными решениями (12), мы введём новый параметр: $t_1 = t_0 + t_{00}$, где

$$
t_{00} \equiv \; -\frac{1}{2\omega}\ln\left(C^2+4A^2\right). \tag{27}
$$

Теперь функции $\phi(t)$ и $\xi(t)$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \frac{A\left(e^{\omega(t-t_1)} - e^{-\omega(t-t_1)}\right)}{e^{\omega(t-t_1)} + \frac{2C}{\sqrt{C^2+4A^2}} + e^{-\omega(t-t_1)}},\\
\xi(t) &= \frac{4A^2}{\sqrt{C^2+4A^2}\left(e^{\omega(t-t_1)} + \frac{2C}{\sqrt{C^2+4A^2}} + e^{-\omega(t-t_1)}\right)}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Рассмотрим решения с $t_1 = 0$. Легко видеть, что в этом случае

$$
\phi(0) = 0, \qquad \dot{\phi}(0) = \frac{A\omega\sqrt{C^2+4A^2}}{C+\sqrt{C^2+4A^2}} > 0 \qquad \text{и} \qquad \dot{\xi}(0) = 0. \tag{29}
$$

Напомним, что мы используем условие $A > 0$. Из формулы (3) следует, что $\dot{H}(0) > 0$, а из формулы (18), что $H(0) = 0$. Таким образом, решения с $t_1 = 0$ и произвольным C являются космологическими решениями типа баунс (bounce), иными словами, $a(t)$ имеет баунс в точке $t = 0$ (о подобных решениях в космологических моделях с двумя скалярными полями см., например, [45]).

Рассмотрим зависимость поведения параметра Хаббла H от значения параметра C. В случае $C = 0$ имеем решения

$$
\phi_0(t) = A\tanh(\omega(t-t_1)) \qquad \text{и} \qquad \xi_0(t) = \frac{A}{\cosh(\omega(t-t_1))}. \tag{30}
$$

При $t_1 = 0$ мы получаем решения (12) с $\omega = 1$. Соответствующий параметр Хаббла

$$
H_0 = \frac{A^2\omega}{6m_p^2}\Big(3\tanh(\omega t) - 2\tanh^3(\omega t)\Big) \tag{31}
$$

имеет максимум в точке $t_{max} = \; -\ln\left(\sqrt{2}-1\right)/\omega \simeq 0.881/\omega$ и убывает при $t \to \infty$. Поля ϕ_0 и ξ_0, параметр Хаббла H_0 и параметр состояния w_{DE} представлены на Рис. 1 (мы положили $A = 1$, $\omega = 1$ и $m_p^2 = 1/6$).

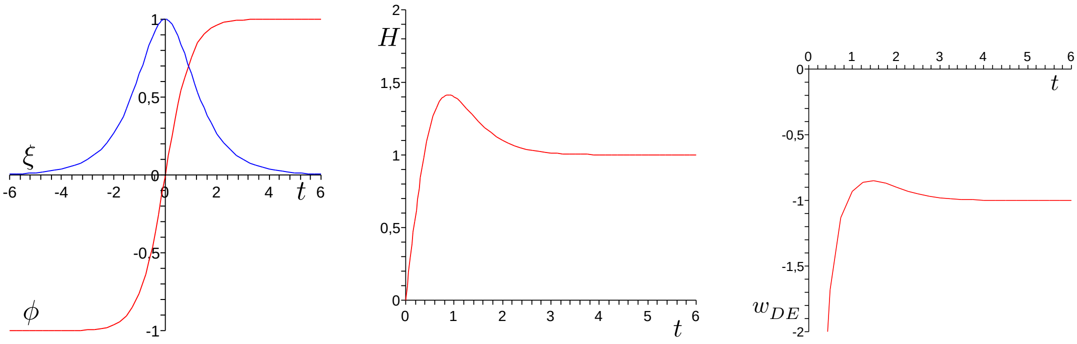

Рис. 1: Поля ϕ и ξ (левая), параметр Хаббла H (центральная) и параметр состояния w_{DE} (правая) при $C = 0$ и $t_1 = 0$.

При произвольном C параметр Хаббла имеет вид:

$$H = \frac{A^2\omega\left(e^{\omega(t_0-t)} + (C^2+4A^2)\,e^{\omega(t-t_0)}\right)}{6m_p^2\left(e^{\omega(t_0-t)} + 2C + (C^2+4A^2)\,e^{\omega(t-t_0)}\right)^3}\Bigl(e^{2\omega(t_0-t)} + 6Ce^{\omega(t_0-t)} + \\ + 10\left(C^2+4A^2\right) + 6C\left(C^2+4A^2\right)e^{\omega(t-t_0)} + \left(C^2+4A^2\right)^2 e^{2\omega(t-t_0)}\Bigr). \tag{32}$$

Прямые вычисления показывают, что для всех C, кроме $C = \pm 2A$, $\dot{H}(t) = 0$ в четырёх точках:

$$t_{m_k} = t_0 - \frac{1}{\omega}\ln\left(-\frac{4A^2 + C^2 \pm 2A\sqrt{8A^2+2C^2}}{(C\pm 2A)(C^2+4A^2)}\right), \qquad k = 1,\dots,4, \tag{33}$$

где 2 символа "$\pm$" — независимы. Отметим, что при $C \neq \pm 2A$ выполняется условие $\ddot{H}(t_{m_k}) \neq 0$. Следовательно, в точках t_{m_k} параметр Хаббла $H(t)$ имеет экстремумы.

При $C > 2A$ ни одна из точек t_{m_k} не принадлежит действительной оси.

Если $C = 2A$, то $\dot{H}(t)$ равняется нулю в двух точках, не принадлежащих действительной оси:

$$\tilde{t}_{m_1} = t_0 - \frac{1}{\omega}\ln(-2A) \qquad \text{и} \qquad \tilde{t}_{m_2} = t_0 - \frac{1}{\omega}\ln(-4A). \tag{34}$$

Таким образом, при $C \geqslant 2A$ параметр Хаббла $H(t)$ является монотонно возрастающей функцией и его поведение напоминает поведение параметра Хаббла в однополевой фантомной модели [18].

При $-2A < C < 2A$ функция $H(t)$ имеет экстремумы в двух точках. Если $t_1 = 0$, то $\phi(t)$ — нечётная функция, а $\xi(t)$ — чётная. Следовательно, соответствующий параметр Хаббла, вычисленный с помощью (18), является нечётной функцией. Легко проверить, что на полуоси $t > 0$ параметр Хаббла $H(t)$ положителен и, следовательно, имеет максимум (см. Рис. 2). Таким образом, поведение функции $H(t)$ при $-2A < C < 2A$ похоже на её поведение при $C = 0$.

Если $C = -2A$, то $\dot{H}(t)$ равняется нулю в двух точках:

$$\tilde{t}_{m_3} = t_0 - \frac{1}{\omega}\ln(2A) \qquad \text{и} \qquad \tilde{t}_{m_4} = t_0 - \frac{1}{\omega}\ln(4A). \tag{35}$$

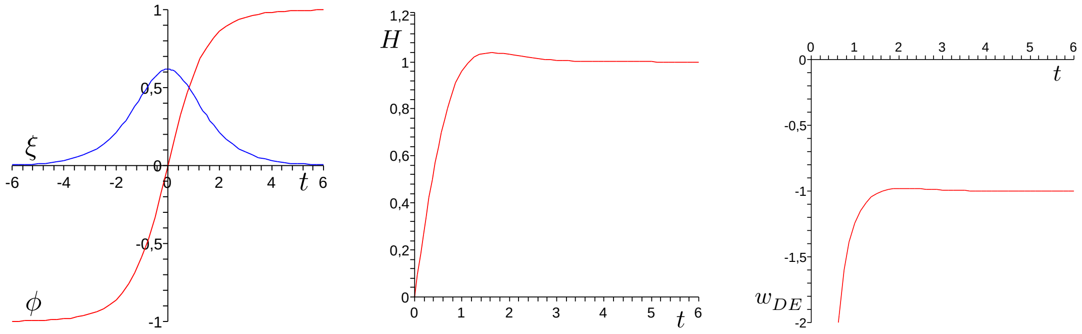

Рис. 2: Поля ϕ и ξ (левая), параметр Хаббла H (центральная) и параметр состояния w_{DE} (правая) при $A = 1$, $C = 1$ и $t_1 = 0$.

Легко проверить, что в этих точках $\ddot{H} \neq 0$, следовательно, поведение параметра Хаббла качественно не отличается от приведённого на Рисунках 1 и 2.

Рассмотрим случай $C < -2A$. Все четыре точки экстремума (33) действительны. Таким образом, выбрав $C < -2A$, мы получаем качественно иное поведение параметра Хаббла.

Если $t_1 = 0$, то, как отмечалось выше, параметр Хаббла является нечётной функцией. Производная параметра Хаббла в нуле положительна, следовательно, $H(t)$ имеет максимум в некоторой точке $t_{m_1} > 0$, минимум в некоторой точке $t_{m_2} > t_{m_1}$ и монотонно возрастает при $t > t_{m_2}$. Отметим, что $w_{DE} < -1$ при $t > t_{m_2}$. Таким образом, найдены точные решения, соответствующие немонотонной функции $H(t)$ с фантомным поведением при больших временах (см. Рис. 3).

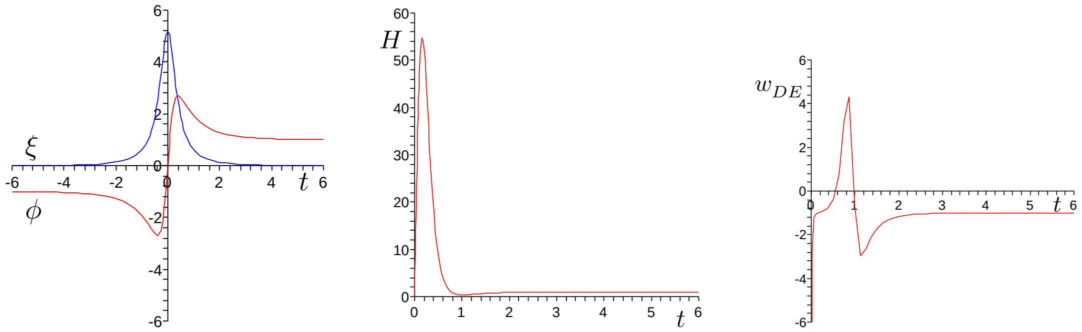

Рис. 3: Поля ϕ и ξ (левая), параметр Хаббла H (центральная) и параметр состояния w_{DE} (правая) при $A = 1$, $C = -5$ и $t_1 = 0$.

Итак, используя метод суперпотенциала, мы нашли для модели с потенциалом

$$\tilde{V} = \omega^2 \left(\frac{1}{8} \left(1 - \phi^2 + \xi^2\right)^2 - \frac{1}{2A^2}\phi^2\xi^2 + \frac{3\phi^2}{4m_p^2} \left(\frac{A}{2} \left(1 - \frac{\phi^2}{3A^2}\right) + \frac{\xi^2}{2A} \right)^2 \right) \qquad (36)$$

двухпараметрическое множество точных решений. Отметим, что полученные решения имеют одинаковые асимптотические условия, тогда как поведение параметра состояния w_{DE} при больших временах оказывается различным. Таким образом, мы может сделать вывод о том, что связанная с теорией струн модель с полиномиальным потенциалом допускает как $w_{DE} > -1$, так и $w_{DE} < -1$ при больших временах.

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы исследовали динамику двухполевой модели тёмной энергии, с одним фантомным полем и одним обычным скалярным полем. Построенная космологическая модель обладает полиномиальным потенциалом $V(\phi, \xi)$, происхождение которого связано с теорией струн. Найдено двухпараметрическое множество точных решений, которое может быть разделено на два подмножества таким образом, что одно подмножество соответствует при больших временах однополевым моделям квинтэссенции, а другое подмножество — однополевым фантомным моделям. Отметим, что оба подмножества полностью состоят из решений, удовлетворяющих одним и тем же асимптотическим условиям.

В статье мы активно используем метод суперпотенциала и показываем, что он позволяет не только строить потенциал для данного решения, но также и находить новые решения. Метод суперпотенциала позволяет расширить однопараметрическое множество решений до двухпараметрического. Использование метода суперпотенциала позволяет разделить исходную систему уравнений движения (2)–(4) на две части. Одна часть — уравнение на суперпотенциал (11), которое в общем случае не интегрируемо, но для многих полиномиальных потенциалов имеет специальные решения в виде полинома. Подстановка этих решений в систему (10) даёт систему однородных дифференциальных уравнений, обычно интегрируемых по крайней мере в квадратурах. Таким образом, метод суперпотенциала позволяет выделить из неинтегрируемой системы уравнений Фридмана интегрируемую подсистему. Отметим, что системы типа (10) активно исследуются в механике. С другой стороны этот метод позволяет делать такую настройку параметров рассматриваемой гравитационной модели, например, такой выбор коэффициентов потенциала, что точные решения существуют в явном виде.

Для решения с $H(0) = 0$, мы получаем $\dot{H}(0) > 0$. Данные решения известны как баунс (bounce) решения (см. [45]). Отметим, что точные решения типа баунс могут быть получены и в нелокальных струнных космологических моделях [47].

Благодарности

Автор благодарит А.А. Андрианова, И.Я. Арефьеву и А.Ю. Каменщика за полезные обсуждения. Работа частично поддержана грантом РФФИ 05-01-00758 и грантом министерства Науки и Образования НШ-8122.2006.2.

Список литературы

[1] A. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astron. J. **116**

(1998) 1009–1038; astro-ph/9805201.

[2] D.N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, Astroph. J. Suppl. **148** (2003) 175–194; astro-ph/0302209,

D.N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **170** (2007) 377–408; astro-ph/0603449.

[3] Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], *Cosmological parameters from SDSS and WMAP,* Phys. Rev. **D69** (2004) 103501; astro-ph/0310723.

[4] P. Astier *et al.* [SNLS Collaboration], The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_M, Ω_Λ and w from the First Year Data Set, *Astron. Astrophys.* **447** (2006) 31–48; astro-ph/0510447.

[5] E.J. Copeland, M. Sami, Sh. Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, *Int. J. Mod. Phys.* **D15** (2006) 1753–1936, hep-th/0603057

[6] Y. Gong, A. Wang, *Reconstruction of the deceleration parameter and the equation of state of dark energy*, astro-ph/0612196.

[7] U. Alam, V. Sahni, A.A. Starobinsky, *Exploring the Properties of Dark Energy Using Type Ia Supernovae and Other Datasets*, JCAP **0702** (2007) 011, astro-ph/0612381

[8] V. Sahni, A.A. Starobinsky, *Reconstructing Dark Energy*, Int. J. Mod. Phys. **D15** (2006) 2105–2132, astro-ph/0610026.

[9] U. Alam, V. Sahni, T.D. Saina, A.A. Starobinsky, *Is there Supernova Evidence for Dark Energy Metamorphosis?*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **354** (2004) 275; astro-ph/0311364

[10] A. Vikman, *Can dark energy evolve to the Phantom?*, Phys. Rev. D **71** (2005) 023515; astro-ph/0407107.

[11] Sh. Nojiri, S.D. Odintsov, *Modified gravity and its reconstruction from the universe expansion history*, hep-th/0611071,

Sh. Nojiri, S.D. Odintsov, *The new form of the equation of state for dark energy fluid and accelerating universe*, Phys. Lett. **B639** (2006) 144–150; hep-th/0606025,

Sh. Nojiri, S.D. Odintsov, *Unifying phantom inflation with late-time acceleration: scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy*, Gen. Rel. Grav. **38** (2006) 1285–1304; hep-th/0506212,

Sh. Nojiri, S.D. Odintsov, *Inhomogeneous equation of state of the universe: phantom era, future singularity and crossing the phantom barrier*, Phys. Rev. **D72** (2005) 023003; hep-th/0505215, Sh. Nojiri, S.D. Odintsov, Sh. Tsujikawa, *Properties of singularities in (phantom) dark energy universe*, Phys. Rev. **D71** (2005) 063004; hep-th/0501025,

[12] Sh. Tsujikawa 2005, *Reconstruction of general scalar-field dark energy models*, Phys. Rev. **D72** (2005) 083512; astro-ph/0508542,

S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, *Crossing the Phantom Divide: Theoretical Implications and Observational Status*, JCAP **0701** (2007) 018; astro-ph/0610092,

R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet, A.A. Starobinsky, *Scalar-Tensor Models of Normal and Phantom Dark Energy*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **0609** (2006) 016; astro-ph/0606287,

В.А. Рубаков, *Фантом без патологий в ультрафиолетовой области*, ТМФ **149** (2006) 409–426 (V.A. Rubakov, *Phantom without UV pathology*, Theor. Math. Phys. **149** (2006) 1651–1664); hep-th/0604153,

H. Mohseni Sadjadi, M. Alimohammadi, *Cosmological coincidence problem in interacting dark energy models*, Phys. Rev. **D74** (2006) 103007; gr-qc/0610080,

M. Alimohammadi, H. Mohseni Sadjadi, *The $w = -1$ crossing of the quintom model with arbitrary potential*, gr-qc/0608016,

H. Mohseni Sadjadi, M. Alimohammadi, *Transition from quintessence to phantom phase in quintom model*, Phys. Rev. **D74** (2006) 043506; gr-qc/0605143,

P.S. Apostolopoulos, N. Tetradis, *Late acceleration and $w = -1$ crossing in induced gravity*, Phys. Rev. **D74** (2006) 064021; hep-th/0604014,

V. Sahni, Yu. Shtanov, *Brane World Models of Dark Energy*, *JCAP* **11** (2003) 014, astro-ph/0202346,

Wen Zhao, Yang Zhang, *The Quintom Models with State Equation Crossing* -1, Phys. Rev. **D73** (2006) 123509; astro-ph/0604460,

Bo Feng, Xiulian Wang, Xinmin Zhang, *Dark Energy Constraints from the Cosmic Age and Supernova*, Phys. Lett. **B607** (2005) 35–41; astro-ph/0404224,

Zong-Kuan Guo, Yun-Song Piao, Xinmin Zhang, Yuan-Zhong Zhang, *Cosmological Evolution of a Quintom Model of Dark Energy*, Phys. Lett. **B608** (2005) 177–182; astro-ph/0410654,

Xiao-Fei Zhang, Hong Li, Yun-Song Piao, *Two-field models of dark energy with equation of state across* -1, Mod. Phys. Lett. **A21** (2006) 231–242; astro-ph/0501652,

Ming-zhe Li, Bo Feng, Xin-min Zhang, *A single scalar field model of dark energy with equation of state crossing* -1, hep-ph/0503268,

Hrv. Stefancic, *Dark energy transition between quintessence and phantom regimes — an equation of state analysis*, Phys. Rev. **D71** (2005) 124036; astro-ph/0504518,

Rong-Gen Cai, Hong-Sheng Zhang, Anzhong Wang, *Crossing $w = -1$ in Gauss-Bonnet Brane World with Induced Gravity*, Commun. Theor. Phys. **44** (2005) 948–954; hep-th/0505186, Yi-Fu Cai, Hong Li, Yun-Song Piao, Xinmin Zhang, *Cosmic Duality in Quintom Universe*, gr-qc/0609039,

Xin Zhang, *Dynamical vacuum energy, holographic quintom, and the reconstruction of scalar-field dark energy*, Phys. Rev. **D74** (2006) 103505; astro-ph/0609699.

Hongsheng Zhang, Zong-Hong Zhu, *Crossing $w = -1$ by a single scalar on a Dvali-Gabadadze-Porrati brane*, Phys.Rev. **D75** (2007) 023510, astro-ph/0611834

[13] A.A. Andrianov, F. Cannata, A.Yu. Kamenshchik, *Complex Lagrangians and phantom cosmology*, J. Phys. **A39** (2006) 9975–9982; gr-qc/0604126.

[14] I.Ya. Aref'eva, A.S. Koshelev, *Cosmic acceleration and crossing of $w = -1$ barrier in non-local Cubic Superstring Field Theory model*, JHEP **0702** (2007) 041; hep-th/0605085

[15] V.K. Onemli, R.P. Woodard, Super-Acceleration from Massless, Minimally Coupled ϕ^4, Class. Quantum Grav. **19** (2002) 4607; gr-qc/0204065,

S.M. Carroll, M. Hoffman, M. Trodden, *Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1?*, Phys. Rev. **D68** (2003) 023509; astro-ph/0301273.

St.D.H. Hsu, A. Jenkins, M.B. Wise, *Gradient instability for $w < -1$*, Phys. Lett. **B597** (2004) 270–274; astro-ph/0406043,

R.V. Buniy, St.D.H. Hsu, B.M. Murray, *The null energy condition and instability*, Phys. Rev. **D74** (2006) 063518, hep-th/0606091

B. McInnes, *Phantom Divide in String Gas Cosmology*, Nucl. Phys. **B718** (2005) 55–82; hep-th/0502209

V. Gorini, A.Yu. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, A.A. Starobinsky, *Stability properties of some perfect fluid cosmological models*, Phys. Rev. **D72** (2005) 103518; astro-ph/0504576.

E.O. Kahya, V.K. Onemli, *Quantum Stability of a $w < -1$ Phase of Cosmic Acceleration*, Phys. Rev. **D76** (2007) 043512, gr-qc/0612026.

[16] I.Ya. Aref'eva, I.V. Volovich, *On the Null Energy Condition and Cosmology*, hep-th/0612098.

[17] I.Ya. Aref'eva, *Nonlocal String Tachyon as a Model for Cosmological Dark Energy*, AIP Conf. Proc. **826** (2006) 301–311, astro-ph/0410443.

[18] И.Я. Арефьева, С.Ю. Вернов, А.С. Кошелев, *Точное Решение в Струнной Космологической Модели*, ТМФ **148** (2006) 23–41 (I.Ya. Aref'eva, A.S. Koshelev, S.Yu. Vernov, *Exact Solvitions in a String Cosmological Model*, Theor. Math. Phys. **148** (2006) 895–909); astro-ph/0412619.

[19] K. Ohmori, *A Review on Tachyon Condensation in Open String Field Theories*, hep-th/0102085;

I.Ya. Aref'eva, D.M. Belov, A.A. Giryavets, A.S. Koshelev, P.B. Medvedev, *Noncommutative Field Theories and (Super)String Field Theories*, hep-th/0111208;

W. Taylor, *Lectures on D-branes, tachyon condensation and string field theory*, hep-th/0301094.

[20] I.Ya. Aref'eva, A.S. Koshelev, S.Yu. Vernov, *Crossing of the $w = -1$ Barrier by D3-brane Dark Energy Model*, Phys. Rev. **D72** (2005) 064017; astro-ph/0507067.

[21] I.Ya. Aref'eva, L.V. Joukovskaya, *Time Lumps in Nonlocal Stringy Models and Cosmological Applications*, J. High Energy Phys. **0510** (2005) 087; hep-th/0504200.

[22] L.V. Joukovskaya, Ya.I. Volovich, *Energy Flow from Open to Closed Strings in a Toy Model of Rolling Tachyon*, math-ph/0308034.

[23] I.Ya. Aref'eva, A.S. Koshelev, S.Yu. Vernov, *Stringy Dark Energy Model with Cold Dark Matter*, Phys. Lett. **B628** (2005) 1–10; astro-ph/0505605.

[24] I.Ya. Aref'eva, A.S. Koshelev, S.Yu. Vernov, *Exact Solutions in $w < -1$ SFT Inspired Cosmological Models*, Bulgarian J. of Phys., **33, Suppl. 1a** (2006) 360–367.

[25] I.Ya. Arefeva, D.M. Belov, A.S. Koshelev, P.B. Medvedev, *Tachyon condensation in cubic superstring field theory*, Nucl. Phys **B638** (2002) 3–20; hep-th/0011117.

[26] I.Ya. Arefeva, D.M. Belov, A.S. Koshelev, P.B. Medvedev, *Gauge invariance and tachyon condensation in cubic superstring field theory*, Nucl. Phys **B638** (2002) 21–40; hep-th/0107197.

[27] E. Witten, *Noncommutative geometry and string field theory*, Nucl. Phys. **B268** (1986) 253–294;

E. Witten, *Interacting field theory of open superstrings*, Nucl.Phys. **B276** (1986) 291–324.

[28] I.Ya. Aref'eva, P.B. Medvedev, A.P. Zubarev, *Background formalism for superstring field theory*, Phys. Lett. **B240** (1990) 356–362;
I.Ya. Aref'eva, P.B. Medvedev, A.P. Zubarev, *New representation for string field solves the consistency problem for open superstring field*, Nucl. Phys. **B341** (1990) 464–498.

[29] C.R. Preitschopf, C.B. Thorn, S.A. Yost, *Superstring Field Theory*, Nucl. Phys. **B337** (1990) 363–433;

[30] N. Berkovits, A. Sen, B. Zwiebach, *Tachyon Condensation in Superstring Field Theory*, Nucl. Phys. **B587** (2000) 147–178, hep-th/0002211.

[31] I.Ya. Aref'eva, L.V. Joukovskaya, A.S. Koshelev, *Time Evolution in Superstring Field Theory on non-BPS brane. Rolling Tachyon and Energy-Momentum Conservation*, hep-th/0301137.

I.Ya. Aref'eva, *Rolling tachyon in NS string field theory*, Fortschr. Phys. **51** (2003) 652–657.

[32] K. Ohmori, *Toward open closed string theoretical description of rolling tachyon*, Phys. Rev. **D69** (2004) 026008; hep-th/0306096.

[33] B. Zwiebach, *Oriented open-closed string theory revisited*, Annals Phys. **267** (1998) 193–248; hep-th/9705241

[34] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, A. Karch, *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*, Phys. Rev. **D62** (2000) 046008, hep-th/9909134.

[35] A.G. Muslimov, *On the Scalar Field Dynamics in a Spatially Flat Friedman Universe*, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 231–237.

[36] D.S. Salopek, J.R. Bond, *Nonlinear evolution of long-wavelength metric fluctuations in inflationary models*, Phys. Rev. **D42** (1990) 3936–3962.

[37] A.R. Liddle, D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-scale Structure*, Cambridge, NY, 2000.

[38] D. Bazeia, M.J. dos Santos, R.F. Ribeiro, *Solitons in systems of coupled scalar fields*, Phys. Lett. **A208** (1995) 84–88; hep-th/0311265.

[39] D. Bazeia, F.A. Brito, *Bags, junctions, and networks of BPS and non-BPS defects*, Phys. Rev. **D61** (2000) 105019; hep-th/9912015.

[40] A. Brandhuber, K. Sfetsos, *Non-standart compatifications with mass gaps ans Newton's law*, J. High Energy Phys. **9910** (1999) 013; hep-th/9908116.

[41] E.B. Bogomol'nyi, *Stability Of Classical Solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449, Yad. Fiz. **24** (1976) 861–870.

[42] D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano, R. Menezes, *First-order formalism and dark energy*, Phys. Lett. **B633** (2006) 415–419; astro-ph/0512197;

D. Bazeia, L. Losano, J.J. Rodrigues, *First-order formalism for scalar field in cosmology*, hep-th/0610028

[43] D. Bazeia, L. Losano, R. Rosenfeld, *First-order formalism for dust*, astro-ph/0611770

[44] A.S. Mikhailov, Yu.S. Mikhailov, M.N. Smolyakov, I.P. Volobuev, *Constructing stabilized brane world models in five-dimensional Brans-Dicke theory*, Class. Quantum Grav. **24** (2007) 231–242; hep-th/0602143.

[45] Yi-Fu Cai, Taotao Qiu, Yun-Song Piao, Mingzhe Li, Xinmin Zhang, *Bouncing universe with quintom matter*, J. High Energy Phys. **0710** (2007) 071; arXiv:0704.1090.

[46] T. Biswas, A. Mazumdar, W. Siegel, *Bouncing Universes in String-inspired Gravity*, JCAP **0603** (2006) 009; hep-th/0508194

[47] I.Ya. Aref'eva, L.V. Joukovskaya, S.Yu. Vernov, *Bouncing and Accelerating Solutions in Nonlocal Stringy Models,* J. High Energy Phys. **0707** (2007) 087; hep-th/0701184.

Сергей Юрьевич Вернов

Построение точных решений в двухполевых космологических моделях

Препринт НИИЯФ МГУ 2007–12/833

Работа поступила в ОНТИ 27.11.2007 г.